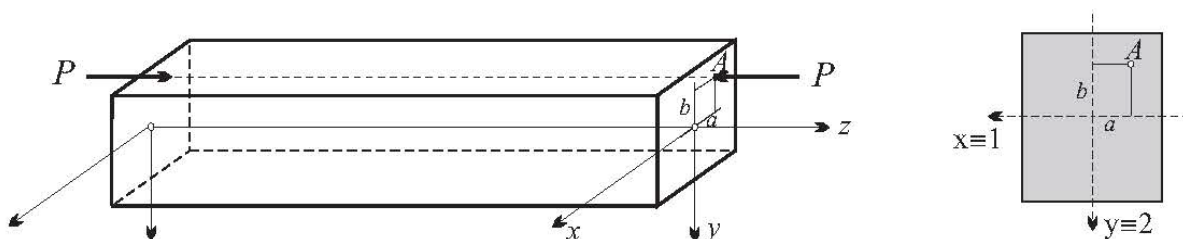


## EKSCENTRIČNO NAPREZANJE

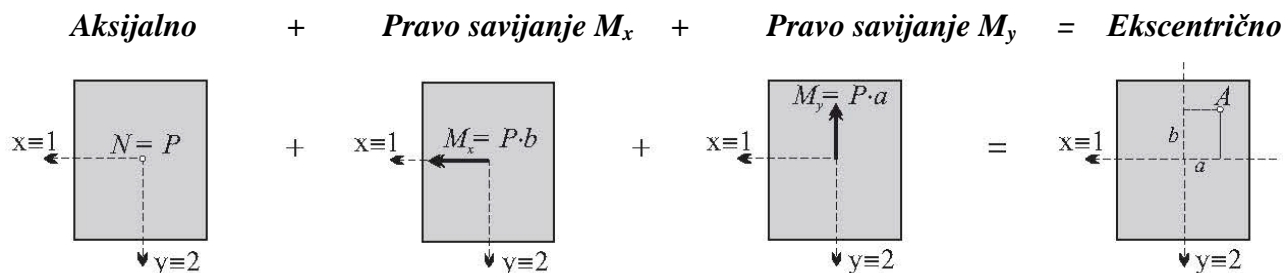
Ako je greda opterećena tako da je pravac djelovanja rezultante spoljašnjih sila paralelan podužnoj osi grede, kažemo da je ona ekscentrično opterećena. Postoje dva slučaja u zavisnosti od smjera napadne sile: ekscentrični pritisak i ekscentrično zatezanje.

Zbog jednostavnosti izvođenja izraza za proračun komponentalnih napona kod ekscentričnog naprezanja, posmatraćemo gredu (slika niže) pravougaonog poprečnog presjeka. Dakle imamo najjednostavniji poprečni presjek kod kojeg se **osa 1 poklapa sa osom x**, a **osa 2 sa osom y**. U slučaju nekog opšteg poprečnog presjeka ose 1 i 2 su u nekom proizvoljnom pravcu, tako da je za proračun napona (sve formule niže) potrebno sračunati te pravce i aksijalne momente inercije za prevce 1 i 2, t.j.  $I_1$  i  $I_2$ . Odnosno, u svim dolje naznačenim formulama  $I_x$  predstavlja  $I_1$ , a  $I_y$  predstavlja  $I_2$ .



Greda je opterećena koncentrisanom silom  $P$  čija je napadna linija paralelna sa podužnom osom grede  $z$ . Koordinate napadne tačke sile  $P$  (tačka  $A$  na slici) u sistemu glavnih osa su označene sa  $a$  i  $b$ . Dakle,  $a$  je koordinata napadne tačke sile u odnosu na osu 1 koja je se u konkretnom slučaju poklapa sa osom  $x$ , dok je  $b$  koordinata napadne tačke sile u odnosu na osu 2 koja je se u konkretnom slučaju poklapa sa osom  $y$ .

Ekscentrično naprezanje poprečnog presjek grede ćemo rastaviti na aksijano naprezanje i dva prava savijanja (tipovi naprezanja koje smo obradili u protekle dvije nedjelje) na način što ćemo silu  $P$  redukovati u težište poprečnog presjeka. Dakle, **ekscentrično naprezanje = aksijalnom naprezanju** (sila  $P$  djeluje u težištu poprečnog presjeka) + **pravom savijanju oko x ose** ( $M_x = P \cdot b$ ) + **pravom savijanju oko y ose** ( $M_y = P \cdot a$ ) u skladu sa narednom slikom.



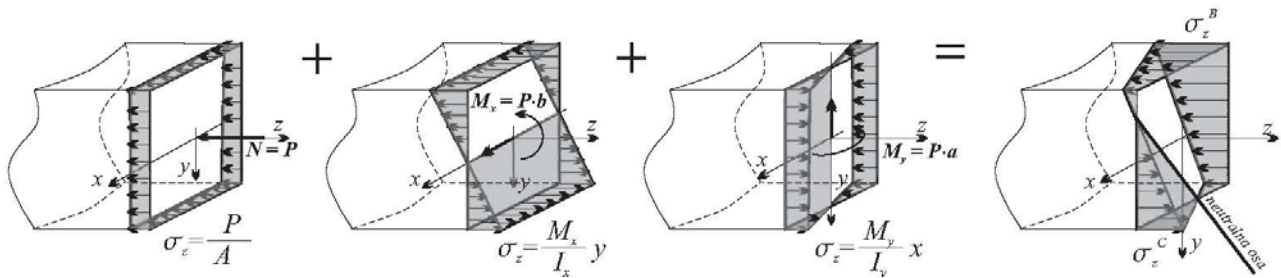
Na prethodnim predavanjima smo definisali sljedeće:

U slučaju aksijalno opterećenog štapa silom ( $P$ ) u poprečnom presjeku površine ( $A$ ) se javlja normalni napon  $\sigma_z = P / A$ ;

U slučaju da je poprečni presjek izložen pravom savijanju oko  $x$  ose momentom ( $M_x$ ) u presjeku će se javiti samo normalni naponi  $\sigma_z = (M_x / I_x) \cdot y$ ;

U slučaju da je poprečni presjek izložen pravom savijanju oko  $y$  ose momentom ( $M_y$ ) u presjeku će se javiti samo normalni naponi  $\sigma_z = (M_y / I_y) \cdot x$ ;

Dakle, pri ekscentričnom naprezanju javlja se samo normalni napon ( $\sigma_z$ ) koji se dobija superpozicijom gore naznačena tri naponska stanja i to:



$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Ako uvedemo tzv. glavne poluprečnike inercije ( $i_x, i_y$ ) kao nove geometrijske karakteristike:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Odnosno ako momente prikažemo kao:

$$M_x = P \cdot b \quad \text{i} \quad M_y = P \cdot a$$

Dobijamo konačan izraz (\*) za proračun normalnih napona u proizvoljnoj tački ekscentrično opterećenog presjeka:

$$\sigma_z = \left( \pm \right) \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{b}{i_x^2} y + \frac{a}{i_y^2} x \right] \quad (*)$$

$a$  i  $b$  - koordinate napadne tačke sile  $P$  u odnosu na sistem glavnih centralnih osa.

Znak plus u gore naznačenom izrazu odgovara zatezanju, a znak minus ekscentričnom pritisku.

### Jednačina neutralne ose

Prethodno smo definisali pojam neutralne ose. To je skup tačaka u kojima je normalni napon jednak nuli.

Znači da bi dobili jednačinu neutralne ose potrebno je izraz (\*) za proračun normalnih napona izjednačiti sa nulo ( $\sigma_z = 0$ ).

Dobijamo sljedeće:

$$1 + \frac{b}{i_x^2} y + \frac{a}{i_y^2} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{-i_y^2/a}{p}} + \frac{y}{\frac{-i_x^2/b}{q}} = 1$$

Dakle, jednačina neutralne ose se dobije u obliku:

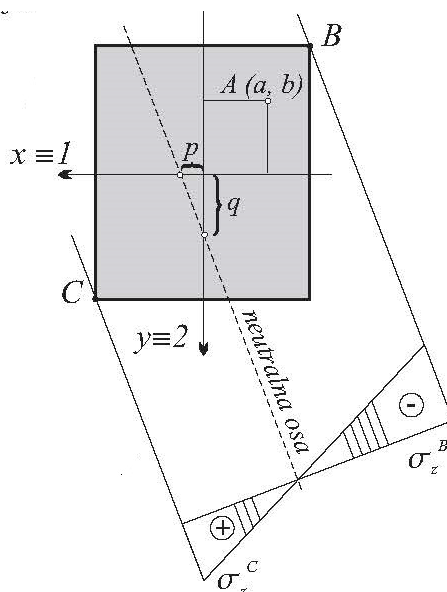
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Iz matematike znamo da je ovo jednačina prave, gdje je  $p$  odsječak prave na  $x$  osi, a  $q$  odsječak ove prave na  $y$  osi.

$$p = -i_y^2/a$$

$$q = -i_x^2/b$$

Konačno, na narednoj slici je prikazana neutralna linija kao i konačan dijagram normalnih napona.



U tačkama *C* i *B*, koje se dobijaju kao tačke u kojima pravci paralelni sa neutralnom osom tangiraju poprečni presjek, javljaju se ekstremne vrijednosti normalnog napona ( $\sigma_z^C = \sigma_{z, max}$ ;  $\sigma_z^B = \sigma_{z, min}$ ).

$$\sigma_z^{B,C} = \pm \frac{P}{A} \left[ l + \frac{b}{i_x^2} y_{B,C} + \frac{a}{i_y^2} x_{B,C} \right]$$

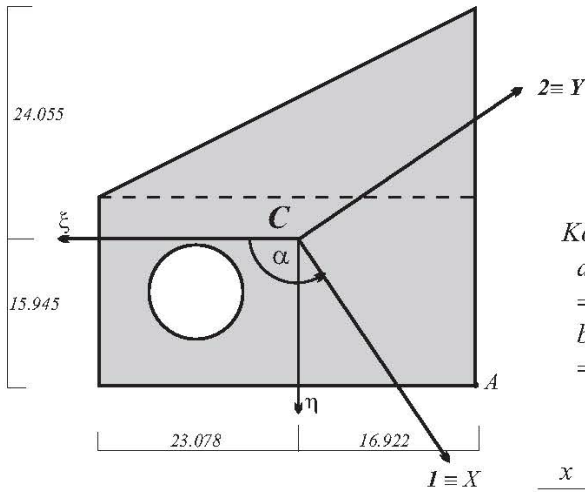
**Jezgro presjeka** je geometrijsko mjesto napadnih tačaka ekscentričnih sila, čije neutralne ose tangiraju konturu poprečnog presjeka. Dakle, ako se napadna tačka nalazi unutar jezgra ili na njegovoj konturi imamo jednoznačan dijagram normalnih napona. U slučaju da se napadna tačka ekscentrične sile nalazi van jezgra, dijagram normalnih napona je dvoznačan.

## LITERATURA

1. R. Pejović, Građevinska mehanika (II dio) – OTPORNOST, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2014.
2. R. Pejović, Otpornost materijala, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2015.
3. V. Brčić, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
4. V. Lubarda, Otpornost materijala, Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu, Titograd, 1989.

## RAČUNSKI PRIMJER ZA SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA

Presek kao na slici opterećen je ekscentričnom silom zatezanja  $P=40\text{ kN}$  u tački A. Odrediti položaj neutralne ose i nacrtati dijagram ekstremnih vrednosti normalnog napona.



Poznati podaci:

$$I_1 = 160856.545\text{ cm}^4$$

$$I_2 = 86721.197\text{ cm}^4$$

$$A = 1121.46\text{ cm}^2$$

$$\alpha = 121.14^\circ$$

Rešenje:

Koordinate napadne tačke A u sistemu glavnih centralnih osa:

$$a = \xi_A \cos\alpha + \eta_A \sin\alpha =$$

$$= (-16.922) \cos(121.14^\circ) + 15.945 \sin(121.14^\circ) = 22.398\text{ cm}$$

$$b = -\xi_A \sin\alpha + \eta_A \cos\alpha =$$

$$= -(-16.922) \sin(121.14^\circ) + 15.945 \cos(121.14^\circ) = 6.238\text{ cm}$$

Jednačina neutralne ose

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$p = -i_y^2/a$$

$$q = -i_x^2/b$$

} odsecci neutralne ose

$$i_x = i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{160856.545}{1121.46}} = 11.976\text{ cm}$$

$$i_y = i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{86721.197}{1121.46}} = 8.794\text{ cm}$$

$$p = -8.794^2/22.398 = -3.452\text{ cm}$$

$$q = -11.976^2/6.238 = -22.994\text{ cm}$$

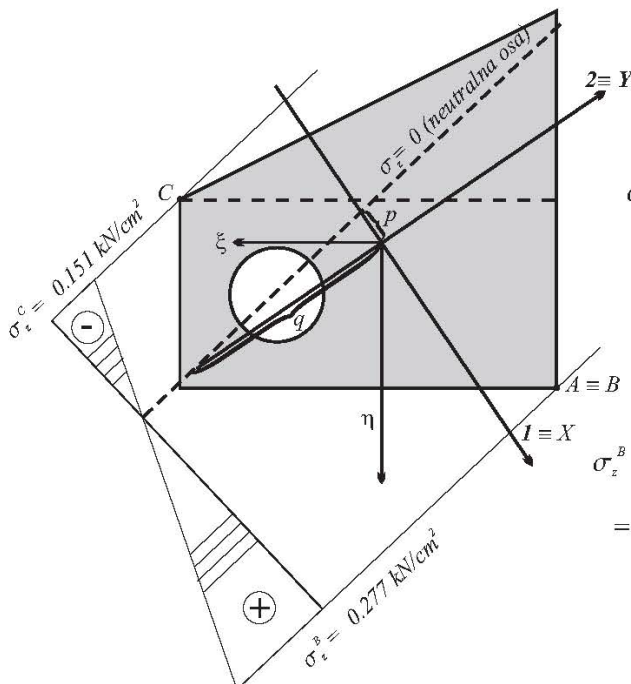
U tačkama B i C, koje se dobijaju kao tačke u kojima pravci paralelni sa neutralnom osom tangiraju poprečni presek, javljaju se ekstremne vrednosti napona  $\sigma_z$ .

$$\sigma_z^{B,C} = \pm \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{b}{i_x^2} y_{B,C} + \frac{a}{i_y^2} x_{B,C} \right]$$

plus odgovara ekscentričnom zatezanju  
minus odgovara ekscentričnom pritisku

Koordinate tačaka B i C u sistemu glavnih centralnih osa prikazane su u tabeli.

tačka	sistem $\xi\eta$		sistem glavnih centralnih osa 1o2 (XOY)	
	$\xi$	$\eta$	$x = \xi \cdot \cos\alpha + \eta \cdot \sin\alpha$	$y = -\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha$
B	-16.922	15.945	22.398	6.238
C	23.078	-4.055	-15.405	-17.656



naponi

$$\begin{aligned} \sigma_z^B &= \pm \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{b}{i_x^2} y_B + \frac{a}{i_y^2} x_B \right] = \\ &= + \frac{40}{1121.46} \left[ 1 + \frac{6.238}{11.976^2} 6.238 + \frac{22.398}{8.794^2} 22.398 \right] \\ \sigma_z^B &= 0.277\text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^C &= \pm \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{b}{i_x^2} y_C + \frac{a}{i_y^2} x_C \right] = \\ &= + \frac{40}{1121.46} \left[ 1 + \frac{6.238}{11.976^2} (-17.656) + \frac{22.398}{8.794^2} (-15.405) \right] \\ \sigma_z^C &= -0.151\text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$